Seri bahan kuliah Algeo #12 – Update 2023

Vektor di Ruang Euclidean
(bagian 2)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Ortogonal dan ortonormal

- Dua buah vektor tak-nol **u** dan **v** di R^n dikatakan **ortogonal** atau saling tegak lurus jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$,

- Vektor nol selalu ortogonal dengan *setiap* vektor di R^n

- Himpunan vektor di R^n disebut **himpunan ortogonal** jika setiap pasang vektor di dalam himpunan tersebut ortogonal.

- Himpunan ortogonal vektor-vektor satuan dinamakan **himpunan ortonormal**.

Contoh 15:

(a) Himpunan vektor $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ dengan $\mathbf{v_1} = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{v_2} = (1, 0, 2)$, dan $\mathbf{v_3} = (-2, -5, 1)$ membentuk himpunan orthogonal karena

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = (-2)(1) + (1)(0) + (1)(2) = -2 + 0 + 2 = 0$$

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_3} = (-2)(-2) + (1)(-5) + (1)(1) = -4 - 5 + 1 = 0$$

$$\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_3} = (1)(-2) + (0)(-5) + (2)(1) = -2 + 0 + 2 = 0$$

(ii) Himpunan vektor $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ dengan $\mathbf{v_1} = (-3, 4, -1)$, $\mathbf{v_2} = (1, 2, 2)$, dan $\mathbf{v_3} = (4, -3, 0)$ bukan himpunan orthogonal karena

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = (-3)(1) + (4)(2) + (-1)(2) = -3 + 8 - 2 = 3 \neq 0$$

(cukup ditunjukkan satu saja perkalian titik dua vector yang tidak menghasilkan nol untuk menyatakan bukan himpunan ortoginal)

Contoh 16: Himpunan vektor satuan {**i**, **j**, **k**} di R^3 adalah himpunan orthogonal sekaligus himpunan ortonormal, karena

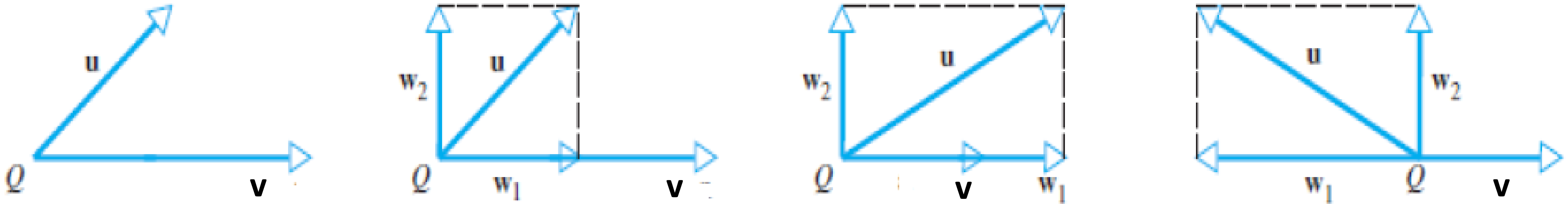
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = (1)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = (1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = (1)(0) + (0)(0) + (0)(1) = 0$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = (0)(0) + (1)(0) + (0)(1) = 0$$

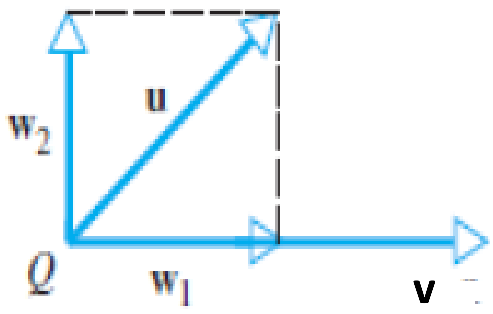
Proyeksi Ortogonal

- Jika **u** dan **v** adalah dua vektor di R^n dan **v** $\neq 0$, maka **u** dapat dinyatakan sebagai **u** = $\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$, yang dalam hal ini $\mathbf{w_1}$ adalah proyeksi **u** pada **v** dan $\mathbf{w_2}$ adalah komponen dari **u** yang orthogonal pada **v**.



Bagaimana cara menentukan $\mathbf{w_1}$ dan $\mathbf{w_2}$?

- Tinjau gambar ini:



$\mathbf{w}_1$ = proyeksi **u** pada **v**

= perkalian skalar *k* dengan **v**

= $k\mathbf{v}$

dan

$\mathbf{w}_2$ = komponen dari **u** yang orthogonal pada **v**.

maka

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = k\mathbf{v} + \mathbf{w}_2$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (k\mathbf{v} + \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{v}$$

$$= k\,\|\mathbf{v}\|^2 + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}$$

$$= k\,\|\mathbf{v}\|^2 \quad (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ sebab } \mathbf{w}_2 \perp \mathbf{v}) \rightarrow k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

sehingga

$$\boxed{\mathbf{w}_1 = k\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v}}$$

dan

$$\boxed{\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \mathbf{u} - k\mathbf{v} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v}}$$

Contoh 17: Misalkan **u** = (2, –1, 3) dan **v** = (4, –1, 2), tentukan proyeksi orthogonal **u** pada **v** dan komponen **u** yang orthogonal dengan **v**.

Penyelesaian:

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$

$\|\mathbf{v}\|^2 = (\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (2)^2})^2 = (4)^2 + (-1)^2 + (2)^2 = 16 + 1 + 2 = 21$

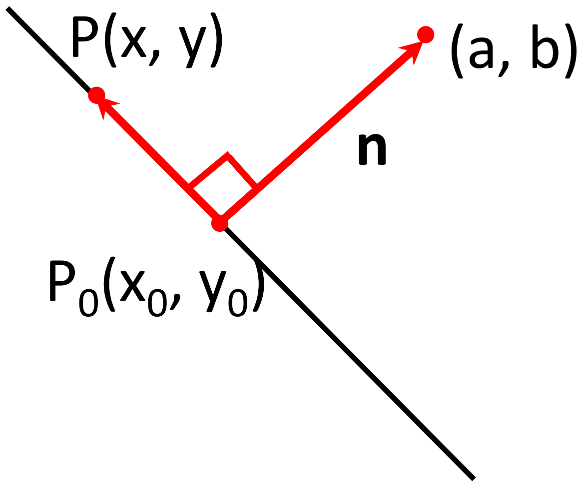
maka

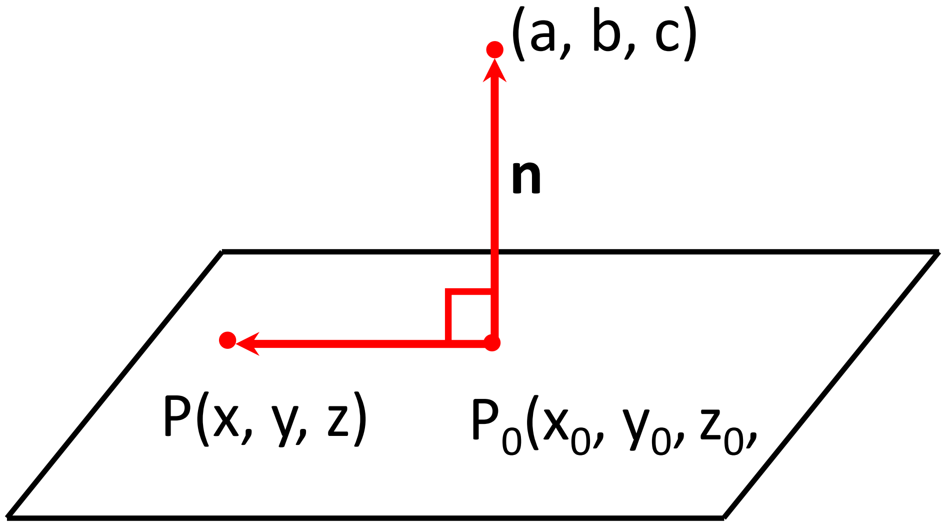
$\mathbf{w_1} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v} = \frac{15}{21}(4, -1, 2) = (20/7, -5/7, 10/7)$

$\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{w_1} = (2, -1, 3) - (20/7, -5/7, 10/7) = (-6/7, -2/7, 11/7)$

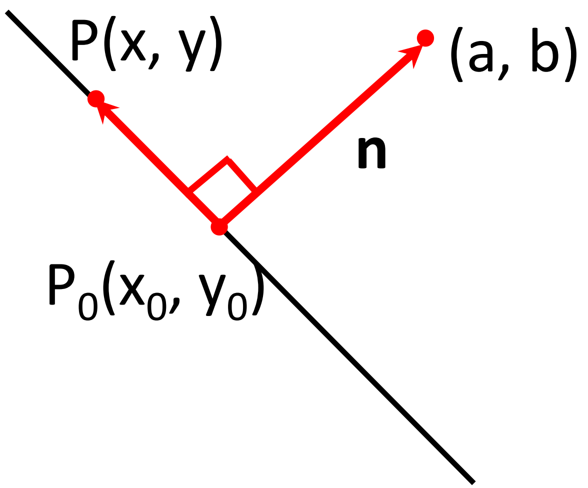
Vektor Normal

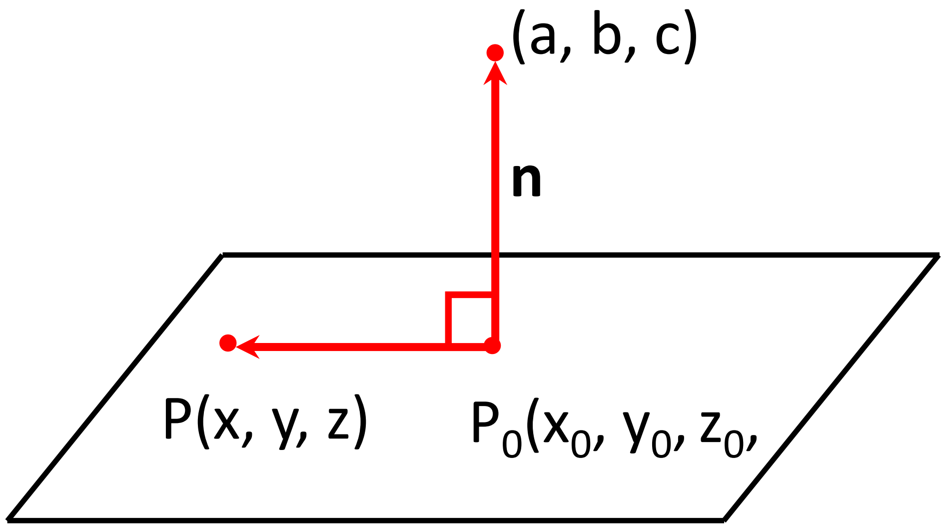
- Vektor normal (atau **normal** saja) adalah vektor yang tegak lurus dengan sebuah garis atau sebuah bidang





n = vektor normal = normal





$\mathbf{n} = (a, b)$

$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$

$\mathbf{n}$ dan $\overrightarrow{P_0P}$ orthogonal, sehingga

$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$$

$\mathbf{n} = (a, b, c)$

$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$\mathbf{n}$ dan $\overrightarrow{P_0P}$ orthogonal, sehingga

$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

Contoh 18:

(i) Persamaan $7(x - 1) + 2(y + 3) = 0$ menyatakan persamaan garis lurus yang melalui titik $(1, -3)$ dengan normal $\mathbf{n} = (7, 2)$.

(ii) (i) Persamaan $2(x - 3) - 5(y - 6) + 7z = 0$ menyatakan persamaan bidang yang melalui titik $(3, 6, 0)$ dengan normal $\mathbf{n} = (2, -5, 7)$.

Contoh 19: Carilah persamaan bidang yang melalui titik $P(2, 6, 1)$ dan tegak lurus dengan $\mathbf{n} = (1, 4, 2)$.

<u>Penyelesaian</u>: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$$1(x - 2) + 4(y - 6) + 2(z - 1) = 0$$

$$x - 2 + 4y - 24 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 4y + 2z - 28 = 0$$

- Bentuk umum persamaan garis lurus adalah $ax + by + c = 0$ dengan normal $\mathbf{n} = (a, b)$

- Bentuk umum persamaan bidang adalah $ax + by + cz + d = 0$ dengan normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$

- Contoh:

  (i) Persamaan garis lurus $2x - 3y + 8 = 0$ memiliki normal $\mathbf{n} = (2, -3)$

  (ii) Persamaan bidang $x + 11x - 9y - 10 = 0$ memiliki normal $\mathbf{n} = (1, 11, -9)$

Contoh 20: Carilah persamaan bidang yang melalui titik (3, 2, 1), (2, 1, –1), dan (–1, 3, 2).

<u>Penyelesaian</u>:

Persamaan bidang: $ax + by + cz + d = 0$

(3, 2, 1) $\rightarrow$ $3a + 2b + c + d = 0$

(2, 1, –1) $\rightarrow$ $2a + b - c + d = 0$

(–1, 3, 2) $\rightarrow$ $-a + 3b + 2c + d = 0$

SPL:

$$
\begin{aligned}
3a + 2b + c + d &= 0 \\
2a + b - c + d &= 0 \\
-a + 3b + 2c + d &= 0
\end{aligned}
$$

Selesaikan SPL dengan metode eliminasi Gauss untuk menemukan nilai a, b, c, dan d (solusi berbentuk parametrik, karena banyak sekali bidang yang melalui ketiga titik tersebut)

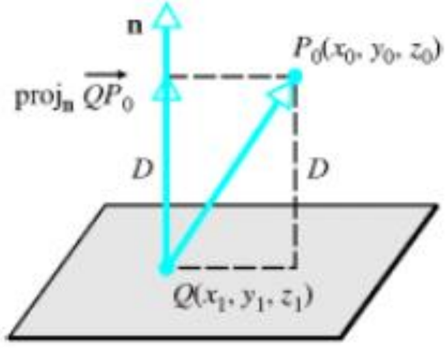
Jarak sebuah titik ke garis dan ke bidang

- Di R^2, jarak antara titik $P_0(x_0, y_0)$ dengan garis ax + by + c = 0 adalah

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

- Di R^3, jarak antara titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan bidang ax + by + cz + d = 0 adalah

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$



Distance from P_0 to plane.

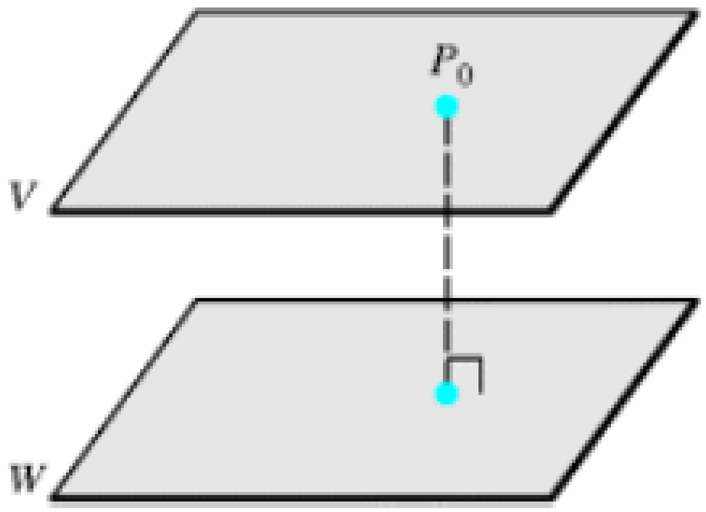
Contoh 21: Tentukan jarak dari titik (1, –4, –3) ke bidang 2x – 3y + 6z = -1

Penyelesaian:

2x – 3y + 6z = –1 → 2x – 3y + 6z + 1 = 0 → a = 2, b = –3, c = 6, d = 1

$$d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2(1)+(-3)(-4)+6(-3)+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}} = \frac{3}{7}$$

Jarak antara dua bidang paralel



Jarak antara bidang V dan bidang W = jarak dari P_0 ke W

Contoh 22: Tentukan jarak antara bidang x + 2y – 2z = 3 dan bidang 2x + 4y – 4z = 7

Penyelesaian:

Bidang x + 2y – 2z – 3 = 0 → **n** = (1, 2, –2)

Bidang 2x + 4y – 4z – 7 = 0 → **n** = (2, 4, –4)

Pilih sebuah titik di bidang x + 2y – 2z – 3 = 0:

ambil y = 0, z = 0, maka x = 3 – 2y + 2z = 3 – 2(0) + 2(0) = 3

diperoleh titik (3, 0, 0)

Hitung jarak dari (3, 0, 0) ke bidang 2x + 4y – 4z – 7 = 0 sbb:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2(3)+4(0)+(-4)(0)-7|}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}} = \frac{1}{6}$$

Latihan (Kuis 2022)

Diketahui persamaan dua buah bidang: 2x – y – z = 5 dan –4x + 2y + 2z = 12

a) Tunjukkan bahwa kedua bidang tersebut parallel

b) Hitung jarak kedua buah bidang tersebut

Jawaban:

a) 2x – y – z – 5 = 0 $\rightarrow$ $\mathbf{n_1}$ = (2, -1, -1)

–4x + 2y + 2z – 12 = 0 $\rightarrow$ $\mathbf{n_2}$ = (-4, 2, 2)

Karena $\mathbf{n_2}$ = -2$\mathbf{n_1}$, maka vektor normal kedua bidang tersebut sejajar, berarti kedua bidang tsb paralel

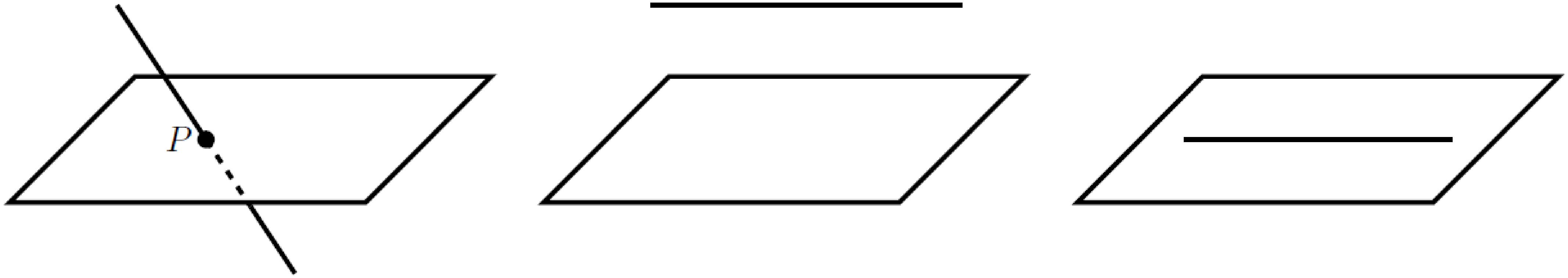
b) Pilih sebuah titik di bidang 2x – y – z – 5 = 0, misalkan ambil y = 0, z = 0, maka x = (y + z + 5)/2 = 5/2 = 2,5

diperoleh titik (5/2, 0, 0). Hitung jarak dari (3, 0, 0) ke bidang –4x + 2y + 2z – 12 = 0 sbb:

$$d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\left|(-4)\left(\frac{5}{2}\right)+(2)(0)+(2)(0)-12\right|}{\sqrt{(-4)^2+(2)^2+(2)^2}} = \frac{|-10-12|}{\sqrt{16+4+4}} = \frac{22}{\sqrt{24}} = \frac{22}{\sqrt{24}} \times \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{24}} = \frac{11}{12}\sqrt{24}$$

Perpotongan garis dengan bidang

- Kedudukan sebuah garis dengan bidang dapat memiliki tiga kemungkinan:
  1. Garis memotong bidang di sebuah titik
  2. Garis sejajar dengan bidang
  3. Garis terletak pada bidang



Sumber: MIT Open CourseWare. http://ocw.mit.edu

Contoh 23: Diketahui bidang P dengan persamaan $2x + y - 4z = 4$.

(a) Tentukan semua titik potong P dengan garis $x = t$, $y = 2 + 3t$, $z = t$

(b) Tentukan semua titik potong P dengan garis $x = 1 + t$, $y = 4 + 2t$, $z = t$

(c) Tentukan semua titik potong P dengan garis $x = t$, $y = 4 + 2t$, $z = t$

Penyelesaian: Ket: Persamaan garis dalam bentuk parametrik

a) Sulihkan x, y, dan z ke dalam persamaan bidang:

$$2(t) + (2 + 3t) - 4(t) = 4 \rightarrow t = 2$$

Gunakan t untuk menemukan $(x, y, z) = (2, 8, 2)$ → berpotongan pada satu titik

b) Sulihkan x, y, dan z ke dalam persamaan bidang:

$$2(1 + t) + (4 + 2t) - 4(t) = 4 \rightarrow 6 = 4 \rightarrow$$ tidak ada nilai t yang memenuhi persamaan ini

→ garis sejajar dengan bidang

c) Sulihkan x, y, dan z ke dalam persamaan bidang:

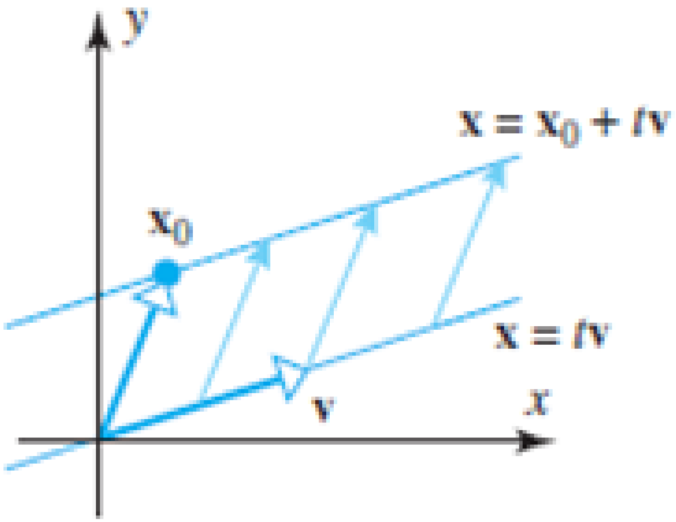
$$2(t) + (4 + 2t) - 4(t) = 4 \rightarrow 4 = 4 \rightarrow$$ semua nilai t memenuhi persamaan ini

→ garis terletak pada bidang

Vektor dan persamaan parametrik garis di R^2 dan R^3

- Misalkan L adalah garis di R^2 atau R^3 yang mengandung titik $\mathbf{x_0}$ dan paralel dengan vektor $\mathbf{v}$. Persamaan garis yang melalui $\mathbf{x_0}$ dan parallel dengan $\mathbf{v}$ adalah

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{v}$$



- Jika $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$, maka persamaan garis yang melalui titik asal menjadi

$$\mathbf{x} = t\mathbf{v}$$

Contoh 24: Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik garis yang melalui titik asal dan parallel dengan vector **v** = (–2, 3).

Penyelesaian:

(i) Persaman vector: $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$

Misalkan **x** = (x, y), maka (x, y) = t(–2, 3).

(ii) Persamaan parametrik garis: x = –2t dan y = 3t

Contoh 25: Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik garis yang melalui titik $P_0(1, 2, -3)$ dan paralel dengan vector **v** = (4, –5, 1).

Penyelesaian:

(i) Persaman vector: $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{v}$

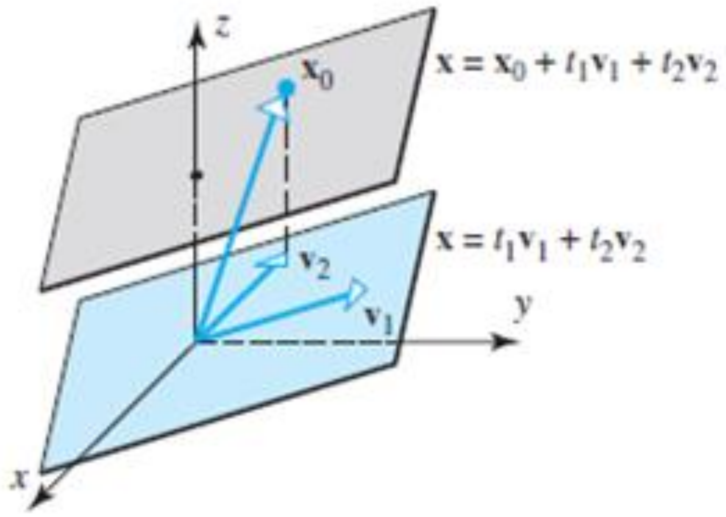
Misalkan **x** = (x, y, z), maka (x, y, z) = (1, 2, –3) + t (4, –5, 1)

(ii) Persamaan parametrik garis: x = 1 + 4t, y = 2 – 5t, z = –3 + t

Vektor dan persamaan parametrik bidang di R^3

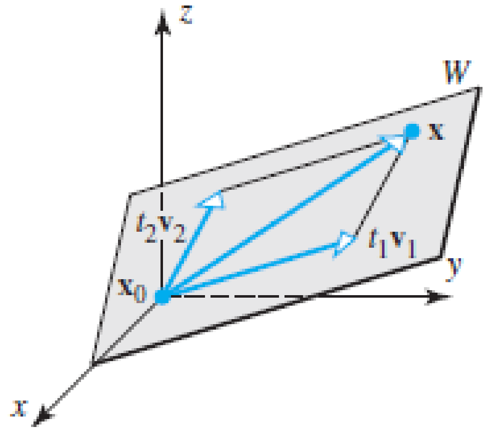
- Misalkan W adalah bidang di R^3 yang mengandung titik $\mathbf{x_0}$ dan paralel dengan vektor $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$. Persamaan bidang yang melalui $\mathbf{x_0}$ dan parallel dengan $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$ adalah

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}$$



- Jika $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$, maka persamaan bidang yang melalui titik asal menjadi

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}$$



Contoh 19: Tentukan persamaan garis (dalam notasi vector) dan persamaan parametrik garis yang melalui titik asal dan parallel dengan vector **v** = (5, –3, 6, 1).

Penyelesaian:

(i) Persaman garis (dalam notasi vektor): $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$

Misalkan **x** = (w, x, y, z), maka (w, x, y, z) = t(5, –3, 6, 1).

(ii) Persamaan parametrik garis: w = 5t, x = –3t, y = 6t, z = t

Contoh 20: Tentukan persamaan bidang (dalam notasi vektor) dan persamaan parametrik bidang yang melalui titik $\mathbf{x_0}$(2, –1, 0, 3) dan paralel dengan vector $\mathbf{v_1}$= (1, 5, 2, –4) dan $\mathbf{v_2}$ = (0, 7, –8, 6).

Penyelesaian:

(i) Persaman bidang (dalam notasi vektor): $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}$

Misalkan **x** = (w, x, y, z), maka (w, x, y, z) = (2, –1, 0, 3) + t_1(1, 5, 2, –4) + t_2(0, 7, –8, 6)

(ii) Persamaan parametrik bidang: $w = 2 + t_1$, $x = -1 + 5t_1 + 7t_2$, $y = 2t_1 - 8t_2$,

$z = 3 - 4t_1 + 6t_2$

Latihan soal (diambil dari soal UTS)

1. Diketahui tiga buah vektor **u**=(2,-6,2), **v**=(0,4,-2), **w**=(2,2,-4).

   a). Perlihatkan apakah {**u**,**v** dan **w**} merupakan himpunan orthogonal

   b). Tentukan panjang vektor proyeksi orthogonal **u** pada vektor **w**

2. Diberikan 4 buah titik di ruang yakni, A(0,1,-1); B(1,1,2); C(2,2,1), P(3,3,3)

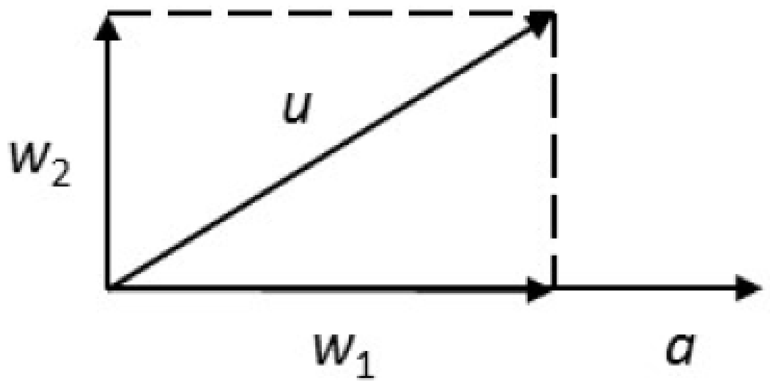
   a). Tentukan persamaan bidang yang melewati titik A,B, dan C dalam bentuk vektor.

   b). Pertanyaan sama dengan a) dengan menggunakan normal bidang

   c). Hitungalah jarak titik P ke bidang tersebut.

   d). Hitunglah luas segitiga ABC.

3. Perhatikan gambar berikut



w_1 adalah projeksi vektor **u**=(2,1,1,2) pada vektor **a**=(4,-4,2,-2), sedangkan w_2 adalah vektor yang orthogonal dengan vektor **a**. Jika vektor **u** dinyatakan sebagai $w_1 + w_2$, tentukan w_1 dan w_2.

4. Tentukan normal dari bidang yang melewati tiga titik P(9,0,4), Q(-1,4,3), dan R(0,6,-2), kemudian tentukan persamaan bidangnya.

5. Diberikan dua persamaan bidang sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 2z &= 1 \\ x - 2y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

a) Periksa apakah dua bidang tersebut parallel atau berpotongan, berikan alasan. *(nilai 10)*

b) Jika bidang tersebut berpotongan, tentukan persamaan garis yang merupakan perpotongannya, jika parallel tentukan jaraknya. *(nilai 10)*

6. Diberikan dua persamaan bidang sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 3x - 4y + z &= 1 \\ 6x - 8y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

a). Periksa apakah dua bidang tersebut parallel atau berpotongan.
b). Jika bidang tersebut parallel tentukan jarak antara keduanya.

Bersambung ke Bagian 3